**Biotechnologisches**

**Gymnasium (BTG)**

**Ernährungswissenschaftliches**
**Gymnasium (EG)**

**Sozialwissenschaftliches**

**Gymnasium (SG)**

Justus von Liebig Schule
Haus- und Landwirtschaftliche Schule Aalen
ostalbkreis
Ernährung, Erziehung, Biotechnologie, Gesundheit und Pflege, Agrar- und Forstwirtschaft

# Mathematik

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

wir freuen uns, dass Sie im neuen Schuljahr die Eingangsklasse (Klasse 11) des BTG, des EG oder des SG besuchen.

Im beruflichen Gymnasium werden im Fach Mathematik für die Oberstufe gewisse Grundlagen benötigt.

Zu den Themen, auf die im Mathematikunterricht der Eingangsklasse aufgebaut wird, haben die Mathematiklehrer/innen jeweils einen Test, eine kurze Zusammenfassung sowie eine kleine Aufgabensammlung zusammengestellt.

Bitte überprüfen Sie vor Schuljahresbeginn Ihr Wissen mit Hilfe dieser Tests und nutzen Sie gegebenenfalls die Zusammenfassung und die Aufgaben, um Ihr Wissen aufzufrischen. Zu Ihrer Kontrolle finden Sie am Ende die Lösungen.

Bei Fragen wenden Sie sich bitte zu Schuljahresbeginn an Ihre/n Mathematiklehrer/in.

Viel Spaß und schöne Ferien!


# Inhalt

# 1. Terme

## 1.1 Test

Wie gut können Sie Terme umformen? Testen Sie sich selbst!

1. Klammern auflösen und zusammenfassen

a) $2x - 4(2x - 2) + 3(6 - 5x) - 9$

b) $3x - (4 + 3x + 2(2x - 1) - 6 - (5 - 3x) + x) + 5$

2. Terme ausmultiplizieren und zusammenfassen

$(3x + 4)^2 - (2x + 5)(2x - 5) + (x - 3)(4 - 2x)$

3. Faktoren ausklammern

$4x^3 + 3x^2 + x$

4. Faktorisieren

$2x^2 - 20x + 50$

## 1.2 Test - Lösungen

### 1. Klammern auflösen und zusammenfassen

a) $2x - 4(2x - 2) + 3(6 - 5x) - 9$
$= 2x - 8x + 8 + 18 - 15x - 9$
$= -21x + 17$

b) $3x - (4 + 3x + 2(2x - 1) - 6 - (5 - 3x) + x) + 5$
$= 3x - (4 + 3x + 4x - 2 - 6 - 5 + 3x + x) + 5$
$= 3x - (11x - 9) + 5$
$= 3x - 11x + 9 + 5$
$= -8x + 14$

### 2. Terme ausmultiplizieren und zusammenfassen

$(3x + 4)^2 - (2x + 5)(2x - 5) + (x - 3)(4 - 2x)$
$= 9x^2 + 24x + 16 - (4x^2 - 25) + 4x - 2x^2 - 12 + 6x$
$= 9x^2 + 24x + 16 - 4x^2 + 25 + 10x - 2x^2 - 12$
$= 3x^2 + 34x + 29$

### 3. Faktoren ausklammern

$4x^3 + 3x^2 + x$
$= x(4x^2 + 3x + 1)$

### 4. Faktorisieren

$2x^2 - 20x + 50$
$= 2(x^2 - 10x + 25)$
$= 2(x - 5)^2$

## 1.3 Klammern auflösen

Zuerst lösen man die inneren Klammern auf, danach die äußeren Klammern.

Eine Plusklammer kann man einfach weglassen:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Eine Minusklammer löst man auf, indem man die Klammern weglässt und alle Rechenzeichen in der Klammer umdreht:

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

## 1.4 Terme ausmultiplizieren

Man multipliziert eine Zahl mit einer Summe, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert:

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad$$

Im Unterschied zu: $a(bc) = abc$

Man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen Summe multipliziert:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - dc + bd$$

## 1.5 Ausklammern

Man kann aus einer Summe ein Produkt machen, indem man einen gemeinsamen Faktor ausklammert.

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

$$a^2 + ab - a = a(a + b - 1)$$

Kann man einen Summanden komplett ausklammern, so bleibt in der Klammer eine 1 stehen:

$$ab + a = a(b + 1)$$

## 1.6 Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

## 1.7 Übungsaufgaben

1. Schreiben Sie ohne Klammern.

a) $3(a-4)-(2a+5)+4(3a)$

b) $5x-(3x-(x+12)-2)+2$

c) $-(3u-(u^2-4u)-(u^2-2u)-6u)$

d) $6-(3+x)(2-x)-x(x-5)$

2. Was gehört in die Lücke, damit die Rechnung stimmt?

a) $-x(1-\quad)=x^2-x$

b) $(a-b)(2a+\quad)=2a^2+ab-3b^2$

3. Klammern Sie aus.

a) $2x+4x^2+2$

b) $18ab+30ac-24bc$

c) $6x^2y+12xy+9y$

4. Schreiben Sie ohne Klammern. <u>Beispiel:</u> $(x-2)^2=x^2-4x+4$

a) $(2x+1)^2$

b) $(x+5)^2$

c) $(4x+3)^2$

d) $(1-4t)^2$

e) $(3x-7)^2$

f) $(5x-4)^2$

g) $(a^2+1)^2$

h) $(5x^2-3)^2$

i) $(4+3a^3)^2$

j) $(4a+5)(4a-5)$

k) $(7x-3)(7x+3)$

l) $(6-5y^2)(6+5y^2)$

5. Schreiben Sie als Produkt. <u>Beispiel:</u> $x^2-4x+4=(x-2)^2$

a) $a^2-25$

b) $x^2-2x+1$

c) $1-a^2$

d) $x^2-8x-16$

e) $4-a^2$

f) $25x^2-16$

g) $9a^2-4$

h) $x^4+8x^2+16$

i) $9-16z^2$

# 2. Bruchrechnen

## 2.1 Test

Wie gut können Sie Bruchrechnen? Testen Sie sich selbst!

1. Brüche erweitern

Erweitern Sie jeweils auf den Nenner 30.

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{2}{15}$

2. Brüche kürzen

$\frac{16ax}{28x^2}$

3. Brüche addieren/subtrahieren

a) $\frac{5}{4}+\frac{2}{5}-\frac{7}{2}+2$

b) $\frac{6}{a^2}-\frac{3}{a}+\frac{5}{2a}$

4. Brüche multiplizieren

a) $\frac{5}{24}\cdot\frac{18}{10}$

b) $\frac{9(a+b)}{8a}\cdot\frac{4a^2}{18(a+b)^3}$

5. Brüche dividieren

a) $\frac{3}{8}:\frac{15}{32}$

b) $\frac{5ab^2}{7x^2y}:\frac{10b}{14x}$

## 2.2 Test – Lösungen

### 1. Brüche erweitern

Erweitern Sie jeweils auf den Nenner 30.

$\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{3}{5};\frac{7}{6};\frac{7}{10};\frac{2}{15}$

$\frac{15}{30};\frac{10}{30};\frac{18}{30};\frac{35}{30};\frac{21}{30};\frac{4}{30}$

### 2. Brüche kürzen

$$\frac{16ax}{28x^2}=\frac{4a}{7x}$$

### 3. Brüche addieren/subtrahieren

a) $\frac{5}{4}+\frac{2}{5}-\frac{7}{2}+2$

$=\frac{25}{20}+\frac{8}{20}-\frac{70}{20}+\frac{40}{20}$

$=\frac{3}{20}$

b) $\frac{6}{a^2}-\frac{3}{a}+\frac{5}{2a}$

$=\frac{12}{2a^2}-\frac{6a}{2a^2}+\frac{5a}{2a^2}$

$=\frac{12-a}{2a^2}$

### 4. Brüche multiplizieren

a) $\frac{5}{24}\cdot\frac{18}{10}$

$=\frac{3}{8}$

b) $\frac{9(a+b)}{8a}\cdot\frac{4a^2}{18(a+b)^3}$

$=\frac{a}{4(a+b)^2}$

### 5. Brüche dividieren

a) $\frac{3}{8}:\frac{15}{32}$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{32}{15}$

$=\frac{4}{5}$

b) $\frac{5ab^2}{7x^2y}:\frac{10b}{14x}$

$=\frac{5ab^2}{7x^2y}\cdot\frac{14x}{10b}$

$=\frac{2ab}{2xy}$

$=\frac{ab}{xy}$

## 2.3 Brüche erweitern

Ein Bruch wird erweitert, indem man den Nenner und den Zähler mit demselben Faktor multipliziert:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{ac}{bc}$$

## 2.4 Brüche kürzen

Ein Bruch wird gekürzt, indem man den Nenner und den Zähler durch denselben Faktor dividiert:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

## 2.5 Addition & Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den gemeinsamen Nenner beibehält:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} - \frac{d}{b} = \frac{a + c - d}{b}$$

Ungleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man den Hauptnenner bestimmt, alle Brüche auf den Hauptnenner erweitert, sodass sie gleichnamig werden und dann die Zähler addiert (subtrahiert):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{a \cdot df}{bdf} + \frac{c \cdot bf}{bdf} - \frac{e \cdot bd}{bdf} = \frac{adf + cbf - ebd}{bdf}$$

Ganzzahlige Summanden werden addiert (subtrahiert), indem man sie in einen Bruch umschreibt und dann addiert (subtrahiert):

$$a + \frac{b}{c} - d = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} - \frac{dc}{c} = \frac{ac + b - dc}{c}$$

## 2.6 Multiplikation von Brüchen

Man multipliziert Brüche miteinander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Falls es möglich ist, sollte man zuvor kürzen.

$$\frac{ac}{b} \cdot \frac{d}{ec} = \frac{a\cancel{c}}{b} \cdot \frac{d}{e\cancel{c}} = \frac{ad}{be}$$

## 2.7 Division von Brüchen

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert dieses Bruches multipliziert.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

## 2.8 Übungsaufgaben

1. Ordnen Sie folgende Brüche der Größe nach.

a) $\frac{11}{12}, \frac{7}{8}, \frac{17}{20}, \frac{7}{12}, \frac{23}{40}$ b) $\frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{11}{12}$

2. Kürzen Sie folgende Brüche soweit wie möglich.

a) $\frac{12}{54}$ b) $\frac{18a}{24b}$ c) $-\frac{15a^2}{45ab}$ d) $-\frac{28xy^2}{35x^2y}$ e) $\frac{22(x-y)}{55(x-y)^2}$ f) $\frac{1-4b^2}{3+6b}$ g) $\frac{9x^2+6x+1}{18x^2-2}$

3. Erweitern Sie folgende Brüche auf den Hauptnenner.

a) $\frac{2a^2}{5}, \frac{3ab}{10}, \frac{5b^2}{6}$ b) $\frac{3}{4x}, \frac{4}{5y}$ c) $\frac{ab}{2x}, \frac{3b}{4x^2}$ d) $\frac{3a}{x+y}, \frac{5a}{x}$ e) $\frac{x+y}{x-y}, \frac{x}{x+y}$

4. Addieren bzw. subtrahieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{2}{9} - \frac{3}{4} + \frac{5}{12}$ b) $\frac{5a}{3x} - \frac{3a}{4x}$ c) $\frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ d) $1 - \frac{1}{x}$ e) $\frac{x}{x-y} - 2$

5. Multiplizieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{14}{15} \cdot \frac{10}{21}$ b) $\frac{5xy}{6} \cdot \frac{8}{15y}$ c) $\frac{3a^2b}{8xy} \cdot \frac{8x^2y^2}{ab}$ d) $\frac{7a^2}{9\cdot(a+b)} \cdot \frac{15\cdot(a+b)}{28a}$ e) $\frac{2y}{y^2-25} \cdot \frac{y+5}{5y}$ f) $\frac{a^2+4a+4}{a^2-6a+9} \cdot \frac{3a^2-27}{6a+12}$

6. Dividieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{15}{16} : \left(-\frac{25}{32}\right)$ b) $\frac{a}{x} : \frac{a}{2x}$ c) $12a^2 : \frac{4a}{b}$ d) $\frac{3xy}{8a} : \frac{9x}{16ab}$ e) $\frac{7a^2x}{9by} : \frac{14ax}{27b^2y}$ f) $\frac{x^2-1}{x+2} : (x+1)$

# 3. Gleichungen

## 3.1 Test

Wie gut können Sie Gleichungen lösen? Testen Sie sich selbst!

1. Lineare Gleichungen lösen

   $2(x+3)+(x+1)(4-3x)=2x-x(3x+1)$

2. Quadratische Gleichungen lösen

   $3x^2-75=0$

3. Quadratische Gleichungen lösen

   $2x^2+4x=0$

4. Quadratische Gleichungen lösen

   $2x^2+5x-7=0$

5. Zeige, dass eine Zahl Lösung ist

   Zeige, dass $x=-3$ Lösung der Gleichung $x^2+5x-3=-x^2$ ist.

## 3.2 Test – Lösungen

### 1. Lineare Gleichungen lösen

$2(x+3)+(x+1)(4-3x)=2x-x(3x+1)$

$2x+6+4x-3x^2+4-3x=2x-3x^2-x$

$$-3x^2+3x+10=-3x^2+x \qquad |+3x^2$$

$$3x+10=x \qquad |-x-10$$

$$2x=-10 \qquad |:2$$

$$x=-5$$

### 2. Quadratische Gleichungen lösen

$3x^2-75=0\;|+75$

$3x^2=75 \qquad |:3$

$x^2=25 \qquad |\sqrt{\;}$

$x=\pm 5$

### 3. Quadratische Gleichungen lösen

$2x^2+4x=0$

$x(2x+4)=0$

$\rightarrow x=0$ oder $2x+4=0 \rightarrow |-4$

$$2x=-4|:2$$

$$x=-2$$

### 4. Quadratische Gleichungen lösen

$2x^2+5x-7=0$

Lösung mit der abc-Formel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4\cdot 2\cdot(-7)}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{-5\pm 9}{4}$$

$\rightarrow x_1=\frac{-5+9}{4}=1$

$\rightarrow x_2=\frac{-5-9}{4}=-3{,}5$

Lösung mit pq-Formel:

$2x^2+5x-7=0|:2$

$x^2+2{,}5x-3{,}5=0$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-\frac{2{,}5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2{,}5}{2}\right)^2-(-3{,}5)}=-1{,}25\pm\sqrt{5{,}0625}$$

$=-1{,}25\pm 2{,}25$

$\rightarrow x_1=1$

$\rightarrow x_2=-3{,}5$

### 5. Zeige, dass eine Zahl Lösung ist

Zeige, dass $x=-3$ Lösung der Gleichung $x^2+5x-3=-x^2$ ist.

$(-3)^2+5\cdot(-3)-3=-(-3)^2$

$-9=-9$

Das ist eine wahre Aussage. Deshalb ist $x=-3$ eine Lösung der Gleichung.

## 3.3 Lineare Gleichungen

Eine Gleichung heißt linear, wenn nur Terme mit x, aber keine mit höhergradigen Summanden wie $x^2$, $x^3$, usw. vorkommen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | **Beispiel:** | $3x - 12 = 13 + 4x$ | **Lösen Sie nach x auf** |
| | | $3x - 4x = 13 + 12$ | Terme sortieren |
| | | $-x = 25$ | zusammenfassen |
| | | $x = -25$ | durch (-1) dividieren |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | Beispiel: | $2z + 3(5z + 7) = 2(10z + 3)$ | **Lösen Sie nach z auf** |
| | | $2z + 15z + 21 = 20z + 6$ | ausmultiplizieren |
| | | $17z + 21 = 20z + 6$ | zusammenfassen |
| | | $-3z = -15$ | Terme sortieren |
| | | $z = 5$ | durch (-3) dividieren |

## 3.4 Quadratische Gleichungen

Eine allgemeine quadratische Gleichung hat für $a \neq 0$ die Form $ax^2 + bx + c = 0$.
Je nachdem, ob diese allgemeine Form vollständig vorhanden ist oder ob Teile fehlen, verwendet man unterschiedliche Lösungswege.

### 3.4.1 Reinquadratische Gleichungen ($ax^2 + c = 0$)

Ist $b = 0$, so heißt die Gleichung „reinquadratisch“.
Diese Gleichungen löst man einfach nach $x^2$ auf. Man erhält im vorletzten Schritt stets die Gleichung $x^2$ = „Zahl“.

**Beispiele:**

a) $9x^2 - 16 = 0| + 16$

$9x^2 = 16|:9$

$x^2 = \frac{16}{9}|\sqrt{\phantom{x}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{16}{9}} = \pm\frac{4}{3}$

b) $-\frac{3}{4}x^2 - 9 = 0| + 9$

$-\frac{3}{4}x^2 = 9|:\left(-\frac{3}{4}\right)$

$x^2 = -12|\sqrt{\phantom{x}}$

Widerspruch, deshalb unlösbar

c) $-\frac{4}{3}x^2 = 0|:\left(-\frac{4}{3}\right)$

$x^2 = 0|\sqrt{\phantom{x}}$

$x = 0$

Ist die „Zahl“ positiv, so hat die Gleichung die zwei Lösungen: $x = \pm\sqrt{"Zahl"}$.
Ist die „Zahl“ = 0, so gilt $x = 0$, die Gleichung besitzt eine (doppelte) Lösung.
Ist die „Zahl“ negativ, so ist die Gleichung unlösbar.

### 3.4.2 Gleichungen ohne Absolutglied ($ax^2 + bx = 0$)

Enthält die Gleichung kein Absolutglied (d.h.$c = 0$), so klammert man x aus und wendet den Satz vom Nullprodukt an.

**Satz vom Nullprodukt**

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn (mindestens) ein Faktor Null ist.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Durch das Ausklammern erhält man ein Produkt und kann den Satz vom Nullprodukt anwenden; somit ist $x = 0$ oder die Klammer $(ax + b) = 0$.

$x = 0$ oder $ax + b = 0 | -b$

$ax = -b | : a$

$x = -\frac{b}{a}$

Diese Gleichungen haben immer zwei Lösungen, wobei eine Lösung immer $x = 0$ ist!

**Beispiel:** $3x^2 + 6x = 0$

$x(3x + 6) = 0$

$x = 0$ oder $3x + 6 = 0 | -6$

$3x = -6 | : 3$

$x = -2$

### 3.4.3 Allgemeine Form ($ax^2 + bx + c = 0$)

Quadratische Gleichungen der allgemeinen Form löst man mit der auch „Mitternachtsformel“ genannten Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ („abc-Formel“).
Die oft in der Mittelstufe verwendete „pq-Formel“ ist in der Oberstufe wenig praktikabel!

**Beispiele:**

1. $-2x^2 + 8x - 6 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-4} = \frac{-8 \pm 4}{-4}$

   $\rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = 3$

2. $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$

   $\rightarrow x_{1,2} = 2$ (einzige und damit doppelte Lösung)

3. $x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

   $\rightarrow$ Unlösbar, da die Diskriminante (der Term unter der Wurzel) negativ ist

## 3.5 Übungsaufgaben

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

1. a) $(2x + 1)(7 - 2x) + x(x + 5) = 3x(8 - x)$

b) $(2x + 6)(x - 2) = 2x(x - 1)$

2.

a) $x^2 - 8 = 0$ b) $2x^2 + 4 = 0$ c) $x^2 + 6x = 0$

d) $-7x^2 + 13x = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $-2x^2 + 8x - 6 = 0$

g) $(2x - 5)(x + 4) = 0$ h) $(2x - 5)(x + 4) = 7$

3.

a) $(x - 4)^2 = 2(x - 3)^2 + 2$ b) $4x^2 - 6x + 4 = (4x - 2)(x + 1)$

# 4. Lösen von Gleichungssystemen

## 4.1 Test

Wie gut können Sie Gleichungssysteme lösen? Testen Sie sich selbst!

1. Lineare Gleichungssysteme lösen

$y = 2x - 4$

$y = x - 3$

2. Lineare Gleichungssysteme lösen

$3x + 4y = 7$

$2x + y = 3$

3. Lineare Gleichungssysteme lösen

$2x + 4y = 7$

$-x - 2y = 9$

4. Lineare Gleichungssysteme lösen

$3x + y = 4$

$-\frac{1}{2}x + y = 2$

5. Gleichungssysteme lösen

$y = 2x^2 + 1$

$y = x^2 + 4x + 1$

## 4.2 Test – Lösungen

**1. Lineare Gleichungssysteme lösen**

$y = 2x - 4$

$y = x - 3$

Gleichsetzungsverfahren:

$2x - 4 = x - 3 | - x + 4$

$x = 1 \rightarrow y = 1 - 3 = -2$ Lösung: $x = 1, y = 2$

**2. Lineare Gleichungssysteme lösen**

$3x + 4y = 7$

$2x + y = 3$

$2x + y = 3 \Leftrightarrow y = -2x + 3$

Einsetzungsverfahren:

$3x + 4(-2x + 3) = 7$

$3x - 8x + 12 = 7 | - 12$

$-5x = -5 | : (-5)$

$x = 1 \rightarrow y = -2 \cdot 1 + 3 = 1$ Lösung: $x = 1, y = 1$

**3. Lineare Gleichungssysteme lösen**

$2x + 4y = 7$

$-x - 2y = 9$

$-x - 2y = 9 \Leftrightarrow x = -2y - 9$

Einsetzungsverfahren:

$2(-2y - 9) + 4y = 7$

$-4y - 18 + 4y = 7 | + 18$

$0 = 25 \rightarrow$ Das ist eine falsche Aussage. Deshalb ist das Gleichungssystem unlösbar.

**4. Lineare Gleichungssysteme lösen**

$3x + y = 4$

$-\frac{1}{2}x + y = 2$

$-\frac{1}{2}x + y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

Einsetzungsverfahren:

$3x + \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 4$

$\frac{7}{2}x + 2 = 4 | -2 | : \frac{7}{2}$

$x = \frac{4}{7} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + 2 = \frac{16}{7}$ Lösung: $x = \frac{4}{7}, y = \frac{16}{7}$

**5. Gleichungssysteme lösen**

$y = 2x^2 + 1$

$y = x^2 + 4x + 1$

Gleichsetzungsverfahren:

$2x^2 + 1 = x^2 + 4x + 1 | - x^2 - 4x - 1$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0$ oder $x - 4 = 0 | + 4$

$x = 4$ 2 Lösungen: $x = 0, y = 1$

und $x = 4, y = 33$

## 4.3 Additionsverfahren

**Beispiel:**

$$2x + 3y = 1$$
$$5x + 7y = 3$$

Multiplizieren Sie die erste Gleichung mit 5 und die zweite mit –2, um Terme zu schaffen, die sich „gegenseitig aufheben".

10x und –10x „heben sich auf".

$$
\begin{array}{rl}
 & 10x + 15y = 5 \\
+ & -10x - 14y = -6 \\
\hline
 & y = -1
\end{array}
$$

Gleichung mit nur noch einer Variablen

Berechnen Sie x

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &= 1 \\
2x + 3 \cdot (-1) &= 1 \\
2x - 3 &= 1 \mid +3 \\
2x &= 4 \mid : 2 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Die Lösung ist $x = 2$

$y = -1$

## 4.4 Einsetzungsverfahren

**Beispiel:**

$$2x + y = 16 \mid -2x$$
$$x - 3y = -6$$

Lösen Sie **eine** Gleichung nach x oder nach y auf.

$$y = 16 - 2x$$

In der **anderen** Gleichung für y nun 16 – 2x einsetzen.

$$
\begin{aligned}
x - 3(16 - 2x) &= -6 \\
x - 48 + 6x &= -6 \mid +48 \\
7x &= 42 \mid : 7 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Gleichung mit nur noch einer Variablen

Berechnen Sie y

$$y = 16 - 2 \cdot 6 = 4$$

Die Lösung ist $x = 6$

$y = 4$

## 4.5 Gleichsetzungsverfahren

**Beispiel:**

$$x + y = 9 \mid -x$$
$$y = x - 1$$

Lösen Sie die erste Gleichung nach y auf.

$$y = 9 - x$$

Die beiden Gleichungen gleichsetzen.

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= 9 - x \mid +x \\
2x - 1 &= 9 \mid +1 \\
2x &= 10 \mid : 2 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Gleichung mit nur noch einer Variablen

Berechnen Sie y

$$y = 5 - 1 = 4$$

Die Lösung ist $x = 5$

$y = 4$

## 4.6 Sonderfälle beim rechnerischen Lösen

**Beispiel 1:**

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 4 \,|\cdot 3 \\ 9x + 6y &= 5 \,|\cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18x + 12y &= 12 \\ -18x - 12y &= -10 \quad + \\ \hline 0 &= 2 \end{aligned}$$

Falsche Aussage

Das Gleichungssystem ist unlösbar.

**Beispiel 2:**

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 14 \,|\cdot 3 \\ 6x - 3y &= 21 \,|\cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x - 6y &= 42 \\ -12x + 6y &= -42 \quad + \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

Wahre Aussage

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

## 4.7 Übungsaufgaben

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme.

1. Mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $-5x + y = 18$
$2x - 6y = 4$

b) $3x + 5y = 2$
$-15x + 25y = -10$

c) $6x - 3y = 3$
$-4x + 2y = -2$

2. Mit dem Einsetzungsverfahren.

a) $2x - 3y = -13$
$5x + 2y = -4$

b) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{3}y = 11$
$5x - \frac{1}{2}y = 7$

c) $2x + 3y = 9$
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 12$

3. Mit dem Additionsverfahren.

a) $2y + 8x = 10$
$3y + 12x = 15$

b) $3x + 2y = 5$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

c) $2x + 3y = 5$
$6x + 9y = 17$